6. Elektrický včelí plást

Richard Hlubina

UK Bratislava

Úvodné sústredenie TMF, Bratislava 22.10. 2015

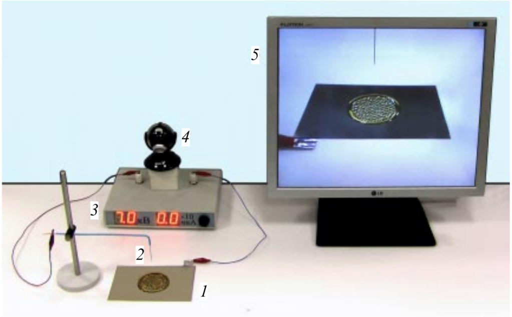
Zadanie

Nad vodorovný kovový povrch poliaty olejom pripevníme zvislo ihlu. Ak medzi ihlu a povrch privedieme konštantné vysoké napätie, na povrchu kvapaliny sa vytvorí bunková štruktúra. Preskúmajte a vysvetlite tento jav.

Literatúra

- I. Marčenko: http://kit.ilyam.org
- V. V. Mayer, E. I. Varaksina, and V. A. Saranin,
  Simple lecture demonstrations of instability and self-organization,
  Phys. Usp. **57**, 1130 (2014)
- video https://youtu.be/KNnnqM0H5bs
  (V. V. Mayer, E. I. Varaksina, and V. A. Saranin)
- G. I. Taylor and A. D. McEwan,
  The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field,
  J. Fluid Mech. **22**, 1 (1965)

Mayer a kol.: experiment - konfigurácia

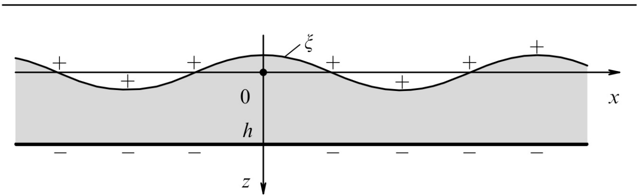


- hrot: oceľová ihla na šitie, polomer krivosti ≈ 0.05 mm
- vzdialenosť hrot-platňa: ≈ 50 mm
- napätie hrot-platňa: $\lesssim 20$ kV (nízkovýkonový zdroj)
- hrúbka olejovej vrstvy: ≈ 2 mm

- transformátorový olej: hustota $\rho \approx 0.88 \times 10^3$ kgm^{-3}, permitivita $\epsilon_R \approx 2.3$

Interpretácia podľa Mayer a kol.

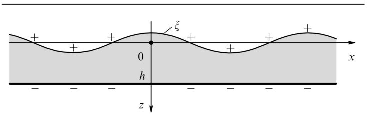
- predpoklad: ionizovaný vzduch je dobre vodivý, olej takmer izolujúci
- dôsledok: potenciál na hornom povrchu oleja je rovnaký ako na hrote
- modelová predstava:
  vrstva oleja = doskový kondenzátor s aplikovaným napätím $U = E_0 h$



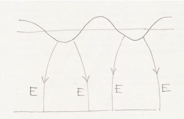
  el. pole v oleji pred deformáciou: E_0
  hrúbka oleja pred deformáciou: h
  relatívna permitivita oleja ϵ_R
- elektrostatický mechanizmus nestability (Taylor - McEwan 1965)

Mechanizmus Taylor - McEwan

- proti deformácii pôsobí hydrostatický tlak aj povrchové napätie, pretože pri deformácii rastie gravitačná aj povrchová energia:



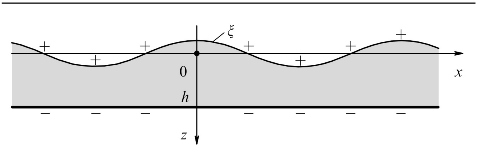
- elektrické pole E (v smere z) v oleji je budené nábojovou hustotou na povrchu oleja $\sigma_{\mathrm{pol}} = \epsilon_0 \epsilon_R E$
- elektrický tlak na povrch oleja p_{el} smeruje nadol (konvencia: $p < 0$)
- $p_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{2}\sigma_{\mathrm{pol}} E = -\frac{1}{2}\epsilon_0 \epsilon_R E^2$
  (faktor $\frac{1}{2}$ pochádza z predstavy o pomalom zapínaní poľa E)
- elektrické pole je silnejšie v miestach s tenším filmom oleja:



- pôvodca deformácie: zvýšený elektrický tlak p_{el} v jamách

Taylor - McEwan: analýza jednorozmernej modulácie

- poloha horného povrchu: $\zeta(x) = -a \cos kx$
  vlnový vektor $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, amplitúda $a \ll h$

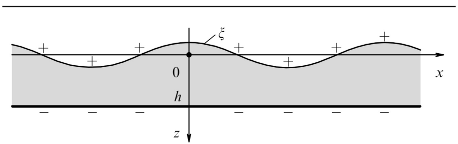


pozor: os z smeruje nadol!
horný povrch oleja
pred deformáciou: $z = 0$
dolný povrch oleja: $z = h$

- hydrostatický tlak na hornom povrchu (oproti tlaku vo výške $z = 0$):
  $p_{\rm hydro}(x) = \rho g \zeta(x)$ (konvencia: $p < 0$ tlačí nadol!)
- Laplaceov tlak (minimalizácia povrchovej energie, povrch. napätie σ):
  v mieste s polomerom krivosti povrchu R: $p_{\rm Laplace} = \frac{\sigma}{R}$
  $p_{\rm Laplace}(x) = -\sigma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = \sigma k^2 \zeta(x)$ (rovnaký smer ako $p_{\rm hydro}$)
- elektrický tlak na povrch (oproti tlaku v homog. poli E_0):
  $p_{\rm el}(x) = -\frac{1}{2}\epsilon_0 \epsilon_R \left[E(x)^2 - E_0^2\right]$;
  pritom $E(x) = E_0 + \delta E(x)$, $\delta E(x) \ll E_0$, preto
  $p_{\rm el}(x) = -\epsilon_0 \epsilon_R E_0 \delta E(x)$ (tlak nadol v miestach s $\delta E(x) > 0$)

Taylor - McEwan: elektrický tlak (náročnejšie)

- el. pole $\mathbf{E}(x,z) = -\nabla\varphi(x,z)$, kde $\varphi(x,z)$ je elektrostatický potenciál

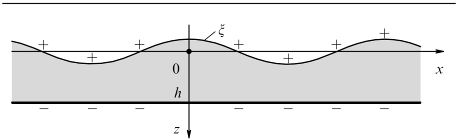


- rovnica pre $\varphi(x,z)$ (pre olej bez voľných nábojov): $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$
- okrajové podmienky:
  horný povrch: $\varphi(x,\zeta) = 0$
  dolný povrch: $\varphi(x,h) = -E_0 h$
- riešenie: $\varphi(x,z) = -E_0 z + E_0 a \cos kx \frac{\sinh(kz-kh)}{\sinh(kh)}$
- zložka E_z el. poľa na povrchu: $E = E_0 + \delta E(x)$,
  modulácia $\delta E(x) = E_0 k \coth(kh)\zeta(x)$
- elektrický tlak: $p_{\mathrm{el}}(x) = -\epsilon_0\epsilon_R E_0^2 k \coth(kh)\zeta(x)$

Taylor - McEwan: podmienka stability

- celkový tlak na povrch $p = p_{\mathrm{hydro}} + p_{\mathrm{Laplace}} + p_{\mathrm{el}}$, preto

$$p(x) = \zeta(x)\left[\rho g + \sigma k^2 - \epsilon_0 \epsilon_R E_0^2 k \coth(kh)\right]$$



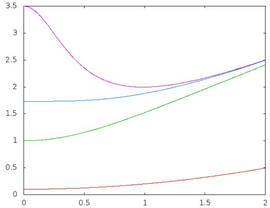
- podmienka stability: $p(x)$ a $\zeta(x)$ majú rovnaké znamienko
- kritická hodnota E_0 pre vznik nestability:

$$\epsilon_0 \epsilon_R E_0^2 = \left(\frac{\rho g}{k} + \sigma k\right) \tanh(kh)$$

- ku každému vlnovému vektoru k (t.j. každej možnej modulácii) prislúcha vlastná kritická hodnota E_0
- najprv sa realizuje k s minimálnou hodnotou E_0

Analýza podmienky stability

- podmienka stability: $\epsilon_0\epsilon_R E_0^2 = \left(\frac{\rho g}{k} + \sigma k\right)\tanh(kh)$
- kapilárna dĺžka: $\ell = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$
- bezrozmerný vlnový vektor: $K = k\ell$, bezrozmerná hrúbka: $H = h/\ell$
  bezrozmerný elektrický tlak: $P = \frac{\epsilon_0\epsilon_R}{\sqrt{\rho g \sigma}} E_0^2$
- bezrozmerná podmienka stability: $P = \left(\frac{1}{K} + K\right)\tanh(KH)$
- graf funkcie $f(K) = \left(\frac{1}{K} + K\right)\tanh(KH)$ pre rôzne hodnoty H:



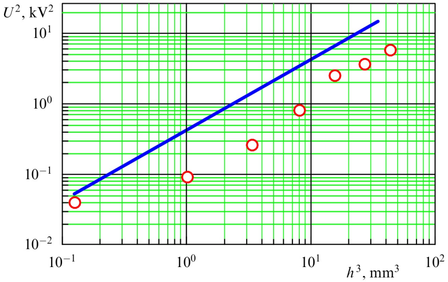
krivky zhora nadol postupne zodpovedajú:
$H = 3.5$
$H = \sqrt{3}$
$H = 1$
$H = 0.1$
minimum funkcie $f(K)$: v bode K^*
hodnota funkcie v minime: $f(K^*)$

- pre $H < \sqrt{3}$ máme $K^* = 0$, pričom $f(K^*) = H$
  pre $H > \sqrt{3}$ máme $K^* \neq 0$, pričom $\sqrt{3} < f(K^*) < 2$

Dva režimy nestability

- optimálna hodnota vlnovej dĺžky $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{K^*}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}}$

  kritické napätie $U_c^2 = \frac{\sqrt{\rho g \sigma}}{\epsilon_0 \epsilon_R} f(K^*) h^2$
- pre tenké filmy $H < \sqrt{3}$ máme $\lambda \to \infty$ (dlhovlnná nestabilita)
  kritické napätie $U_c^2 = \frac{\rho g}{\epsilon_0 \epsilon_R} h^3$
- pre hrubšie filmy $H > \sqrt{3}$ máme konečné vlnové dĺžky λ
  kritické napätie $U_c^2 \approx 2\frac{\sqrt{\rho g \sigma}}{\epsilon_0 \epsilon_R} h^2$
- experimentálne výsledky Mayera a kol. pre závislosť $U_c = U_c(h)$:



- modrá krivka: teoretická predpoveď pre tenké filmy
- kapilárna dĺžka $\ell =$?
- platí predpoklad $H < \sqrt{3}$?

Ako postupovať?

1. Predpokladajme, že Taylor-McEwan funguje. Ako možno podporiť túto interpretáciu?
   - Zmerajte povrchové napätie oleja, napr. z veľkosti kvapiek. Vypočítajte kapilárnu dĺžku ℓ.
   - Pre rôzne hrúbky h filmov zmerajte kritické napätie a vlnovú dĺžku pri U_c. Výsledky porovnajte s predpoveďou $U_c^2 = \frac{\sqrt{\rho g \sigma}}{\epsilon_0 \epsilon_R} f(K^*) h^2$.
   - Pri fixovanej hrúbke filmu zmerajte závislosť vlnovej dĺžky λ od napätia pre $U > U_c$. Výsledky porovnajte s predpoveďou $P = \left(\frac{1}{K} + K\right) \tanh(KH)$. (Predpokladáme pritom, že pre dané U sa realizuje minimálna možná λ. Musí to tak byť?)
2. Vylepšia modifikácie teórie Taylor - McEwan súhlas s experimentom?
   - Obrazec je dvojrozmerný, prezentovali sme jednorozmernú teóriu.
3. Je elektrostatický model, kde olej = doskový kondenzátor, správny?
   - Elektrický tlak p_{el} stláča hladinu oleja v strede disku oproti jej hodnote na okrajoch. Je rozdiel hladín kompatibilný s napätím U naprieč olejom?
   - Akú rolu hrá fakt, že systém nie je v rovnováhe? Odhadnite prúd tečúci cez systém.